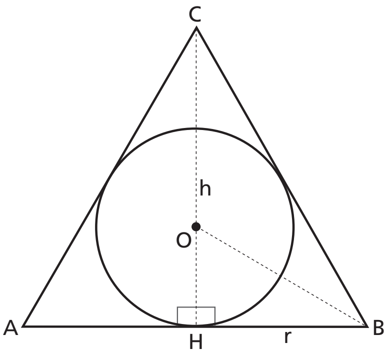
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008

1 Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

1 Consideriamo la sezione lungo l'asse di simmetria di un cono equilatero (figura 10). Indicato con r il raggio di base e con h l'altezza, nel cono equilatero la lunghezza dell'apotema è uguale al diametro di base. Pertanto risulta:

$$h = \sqrt{3}\,r, \qquad V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3.$$



▲ **Figura 10.**

La sfera inscritta ha raggio OH. Considerati i triangoli simili CHB e OHB vale la seguente proporzione:

$$OH : HB = HB : CH \rightarrow OH : r = r : h \rightarrow OH = \frac{r^2}{\sqrt{3}\,r} = \frac{\sqrt{3}}{3}r.$$

Il volume della sfera ha quindi espressione:

$$V_{\text{sfera}} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi r^3.$$

La probabilità P che il punto all'interno del cono sia esterno alla sfera è:

$$P = 1 - \frac{V_{\text{sfera}}}{V_{\text{cono}}} = 1 - \frac{\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3} = \frac{5}{9}.$$