2 Nel decadimento radioattivo la probabilità che un radionuclide decada nel generico intervallo di tempo $[0,\ t[$ è espressa dalla relazione $p(0; t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda z}\, dz$. Nel decadimento beta del ^{32}P (fosforo 32) si osserva che, dopo 14,3 giorni, sono ancora in vita il 50% dei nuclei.

Dimostra che $\lambda = \frac{\ln 2}{14{,}3}$ e calcola la probabilità che un nucleo abbia una durata di vita superiore a 20 giorni.

2 Se in 14,3 giorni il numero di nuclei rimasti in vita è dimezzato significa che la probabilità per un nucleo di essere ancora in vita dopo tale intervallo è $\frac{1}{2}$; pertanto:

$$\int_0^{14,3} \lambda e^{-\lambda z}\,dz = \frac{1}{2}.$$ Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^{14,3} \lambda e^{-\lambda z}\,dz = \lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z}\right]_0^{14,3} = -e^{-\lambda \cdot 14,3} + 1 \rightarrow$$

$$1 - e^{-\lambda \cdot 14,3} = \frac{1}{2}, \qquad e^{-\lambda \cdot 14,3} = \frac{1}{2}, \qquad e^{\lambda \cdot 14,3} = 2 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{14,3} \qquad \text{c.v.d.}$$

La probabilità per un nucleo di avere una durata di vita superiore a 20 giorni si ottiene sottraendo da 1 la probabilità dell'evento complementare, che è il decadimento entro 20 giorni:

$$1 - p(0;20) = 1 - \int_0^{20} \lambda e^{-\lambda z}\,dz = 1 - (1 - e^{-20\lambda}) = e^{-\frac{20}{14,3}\ln 2} \simeq 0,379\ldots.$$

Possiamo anche calcolare direttamente la probabilità richiesta mediante il seguente integrale improprio:

$$p(20;+\infty) = \int_{20}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda z}\,dz = \ldots = \lim_{t \to +\infty}\,[-e^{-\lambda t} + e^{-\lambda \cdot 20}] = e^{-\frac{20}{14,3}\ln 2}.$$

Il risultato ottenuto è uguale a quello precedente.