8 Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due dadi con le facce numerate da «1» a «6», aventi tutte le stesse possibilità di uscire. Si ottiene un successo se, nell'esperimento, esce almeno un «5». Determinare il minimo numero di volte in cui bisogna effettuare l'esperimento per garantirsi una probabilità pari almeno al 99% di ottenere almeno un successo.

8 Si consideri l'evento E = «nel lancio di due dadi esce almeno un 5». I casi favorevoli sono le uscite del numero 5, da un dado, e dei numeri che vanno dall'1 al 6, dall'altro:

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5).

I casi favorevoli sono pertanto 11. I casi possibili sono le disposizioni con ripetizione di 6 elementi a gruppi di 2, ovvero $D'_{6,2}$. Per la definizione classica di probabilità, la probabilità del singolo evento E vale:

$$p(E) = \frac{11}{D'_{6,2}} = \frac{11}{6^2} = \frac{11}{36}.$$

Per lo schema delle prove ripetute o di Bernoulli, dato un evento E sottoposto a n esperimenti indipendenti ognuno con probabilità p costante di verificarsi, essendo $q = 1 - p$ la probabilità dell'evento di non verificarsi, la probabilità di ottenere k successi su n prove è:

$$p_{(k,\, n)} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

Nel nostro caso, supposto di compiere n volte il lancio, la probabilità di ottenere k successi è data dalla seguente espressione:

$$p_{(k,\, n)} = \binom{n}{k}\left(\frac{11}{36}\right)^k \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^{n-k}.$$

La probabilità che non si assista a nessun successo è pertanto:

$$p_{(0,\, n)} = \binom{n}{0}\left(\frac{11}{36}\right)^0 \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^{n} = \left(\frac{25}{36}\right)^{n}.$$

Tenendo conto che la probabilità che si assista almeno a un successo è data da:

$$p_{(k\geq 1,\, n)} = 1 - p_{(0,\, n)},$$

risulta:

$$p_{(k\geq 1,\, n)} = 1 - \left(\frac{25}{36}\right)^{n}.$$

Si ponga tale probabilità maggiore o uguale a 99%:

$$1 - \left(\frac{25}{36}\right)^{n} \geq 0{,}99 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{25}{36}\right)^{n} \leq 0{,}01.$$

Applichiamo i logaritmi ad ambo i membri:

$$\ln\left(\frac{25}{36}\right)^{n} \leq \ln 0{,}01$$

$$n \ln\frac{25}{36} \leq \ln 0{,}01.$$

Essendo $\ln\frac{25}{36} < 0$, otteniamo:

$$n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{25}{36}} \simeq 12{,}63.$$

Pertanto, il minimo numero di volte in cui bisogna effettuare l'esperimento, per garantirsi una probabilità pari almeno al 99% di ottenere almeno un successo, è 13.

