ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007

8 A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».

8 Se indichiamo con x, y e z le somme di denaro che possiedono i tre gentiluomini quando si siedono per giocare, otteniamo la seguente tabella:

Somme possedute dai gentiluomini			
all'inizio	x	y	z
dopo la prima partita	$x-y-z$	$2y$	$2z$
dopo la seconda partita	$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z+2z)=3y-x-z$	$4z$
dopo la terza partita	$4(x-y-z)$	$2(3y-x-z)$	$4z-(2x-2y-2z+3y-x-z)=7z-x-y$

Perciò, siccome dopo la terza partita ciascuno ha la stessa somma di 24 luigi, otteniamo il sistema di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} 4(x-y-z)=24 \\ 2(3y-x-z)=24 \\ 7z-x-y=24 \end{cases}$$

Questo sistema ammette un'unica soluzione $\begin{cases} x=39 \\ y=21 \\ z=12 \end{cases}$

Osserviamo che la prima fase lascia spazio a un'interpretazione meno rigida: non è così chiaro che il secondo e il terzo giocatore raddoppino la propria somma di denaro. Da una lettura critica si dedurrebbe semplicemente che il secondo e il terzo giocatore raddoppino complessivamente le proprie somme. Se indichiamo con x', y' e z' le somme possedute dai tre giocatori al termine della prima partita si ottiene la seguente tabella:

Somme possedute dai gentiluomini			
all'inizio	x	y	z
dopo la prima partita	x'	y'	z'
dopo la seconda partita	$2x'$	$y'-x'-z'$	$2z'$
dopo la terza partita	$4x'$	$2(y'-x'-z')$	$2z'-(2x'+y'-x'-z')=-x'-y'+3z'$

Sapendo inoltre che $x'=x-y-z$ e $y'+z'=2(y+z)$, si otterrebbe il sistema in x', y' e z'

$$\begin{cases} 4x'=24 \\ 2(y'-x'-z')=24 \\ -x'-y'+3z'=24 \end{cases}$$

che può essere ridotto in forma canonica

$$\begin{cases} x' = 6 \\ y' - x' - z' = 12 \\ -x' - y' + 3z' = 24 \end{cases}$$

Questo sistema ammette l'unica soluzione:

$$\begin{cases} x' = 6 \\ y' = 42 \\ z' = 24 \end{cases}$$

Ma le ulteriori condizioni derivanti dalla precedente soluzione

$$\begin{cases} x - y - z = 6 \\ y + z = 33 \end{cases}$$

non sono sufficienti a determinare univocamente una soluzione: si potrebbe solamente dedurre $x = 39$, ma non sarebbe possibile calcolare i singoli valori di y e z.